摩托车能把物品送多远？

每辆车满油能行驶 120 千米。把一满箱油记作 1，先算送货车甲一路用了几箱。

01 两辆车：乙的一箱油分三份



① 乙返程留 1/3 箱。往返是同一段路，去程也用 1/3 箱。

② 所以折返点离出发地 120 × 1/3 = 40 千米，甲也已用掉 1/3 箱。

③ 甲收下乙的 1/3 箱，油箱刚好补满；随后单独用完一整箱。

问题 1　1/3 + 1 = 4/3 箱　　问题 2　40 + 120 = 160 千米

02 三辆车：乙从 B 返回时，要留够两段路的油



① 出发到 A，每辆用 1/4 箱，行驶 30 千米。丙给甲、乙各 1/4 箱。

② 乙在 A 加满，先预留从 A 回家的 1/4 箱。余下 3/4 箱分为三份，分别用于 A 到 B、B 回 A、补给甲，每份都是 (3/4) ÷ 3 = 1/4 箱。

③ 所以 A 到 B 也是 30 千米。乙留 1/4 + 1/4 = 1/2 箱，从 B 返回。

问题 3　甲用油 1/4 + 1/4 + 1 = 3/2 箱，共行驶 180 千米。

11 辆车，每次推进多少？

先画出一个能完成的方案，再在下一页检查为什么它已经最远。

03 第一段的油怎么分？

① 第一辆折返的车必须给其余 10 辆各补上刚走的一段。加上自己的去程与返程，这一箱油正好分为 10 + 1 + 1 = 12 份。

② 每份是 1/12 箱，可以走 120 ÷ 12 = 10 千米。



前两格给自己去、回；后十格各补给一辆同行的车。每格都是 1/12 箱。

04 后面的每一段也能走 10 千米

① 从 10 千米处再走 10 千米。第二辆折返的车在上一站已经补满。

② 它本段走了 1 格，要留 2 格返回出发地，再给其余 9 辆各 1 格。把这三笔合起来，1 + 2 + 9 = 12，恰好用完。

③ 到第 k 个折返点，本段用 1 格、回家留 k 格、给其余 11 − k 辆各 1 格。合计 1 + k + (11 − k) = 12 格，直到第 10 辆折返。



刻度表示距出发地的千米数。甲在 100 千米处最后一次加满。

问题 4　最远距离 = 10 × 10 + 120 = 220 千米。

05 任意 n 辆车时

把一箱分成 n + 1 格；前面走 n − 1 段，每段 120/(n + 1) 千米。

为什么不能到 260 千米？

先用油箱容量判断 260 千米，再用一项提高练习核对前面算出的最远距离。

06 最后一个折返点在哪里？

① 最后一辆支援车分油后，必须靠自己剩下的油一路返回出发地。

② 油箱最多装 1 箱，所以最后一个折返点离出发地最多 120 千米。

③ 此后甲即使装满油，也最多再走 120 千米。合计最多 240 千米。

问题 5　260 > 240，因此不能。再多的摩托车也改变不了油箱容量。

07 提高：等距离折返为什么已经最远？

按题中沿途分油后各自直接返程的方式，设有 n 辆，按离家由近到远给折返点编号。把 120 千米当作 1 个距离单位，走 1 单位恰好耗油 1 箱。

① 记第 j 个折返点离家 x_j，前 j 个折返距离之和为 S_j。到这里，前 j 辆的往返合计耗油 $2S_j$（含尚要留出的返程油）。其余 $n-j$ 辆各自已经走了 x_j，并且最多各装 1 箱。总油量为 n 箱，因此

$$n \le 2S_j + (n-j)x_j + (n-j)。$$

② 代入 $x_j = S_j - S_{j-1}$，整理得到

$$(n-j+2)S_j \ge j + (n-j)S_{j-1}。$$

$S_0 = 0$。右边随上一项增大而增大；等距方案在每一站都把同行车补满，所以上式每一步都取等号。从第一站逐站比较，等距方案的每一个 S_j 都已达到最小值。

③ 全部油耗尽时，甲能走的单位数等于 $n - 2S_{n-1}$。因此，支援车的总往返里程最小时，甲最远。换回千米，与等距方案相符：

最远距离 $= 120 + (n-1) \times 120/(n+1) = 240n/(n+1)$ 千米。